

1 Obecný princip

Definice 1.1 Máme-li binární relaci R na množině A , pak výškovnicí relace R nazveme množinu $V(R)$ všech prvků $a \in A$ takových, že pro každé $x \in A$ platí

$$(a, x) \in R \Rightarrow (x, a) \in R.$$

Pro dvě binární relace G, P na A definujeme výškovnicí relace G podle P :

$$V(G/P) = V(G \cup P^{-1}).$$

Pro více binárních relací získá G_1, G_2, \dots a cen P_1, P_2, \dots máme :

$$V(G_1, G_2, \dots / P_1, P_2, \dots) = V(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup P_1^{-1} \cup P_2^{-1} \dots).$$

1.1 Využití pro skupinové hodnocení

Mějme konečnou množinu A s ohodnocením $h : A \rightarrow \mathbb{R}$. Toto zobrazení určuje relaci R_h danou

$$aR_h b \Leftrightarrow h(a) < h(b).$$

Prvky s maximálním ohodnocením jsou přesně prvky výškovnice $V(R_h)$.

Uvažujme rozklad množiny A na třídy A_i , $i \in I$, tedy $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. Cílem je přenést relaci R_h i na třídy A_i , abychom mohli najít "nejlépe hodnocené" třídy.

Základní vlastnost Chceme, aby pro každé $n \in \mathbb{R}$ platilo:

Třída A_i je (v jistém smyslu) horší než třída A_j , pokud se v A_i vyskytuje méně prvků s ohodnocením aspoň n než v A_j .

Tedy definujeme relaci R_n na množině $B = \{A_i | i \in I\}$ následovně

$$A_i R_n A_j \Leftrightarrow |\{a \in A_i | h(a) \geq n\}| < |\{a \in A_j | h(a) \geq n\}|.$$

Tyto relace chceme zohlednit pro všechna $n \in \mathbb{R}$, tedy určující relací je jejich sjednocení $R = \bigcup_{n \in \mathbb{R}} R_n$, což se dá napsat jako konečné sjednocení $R = \bigcup_{a \in A} R_{h(a)}$. Výškovnicí relace R tedy určí třídy významné vzhledem k ohodnocení prvků.

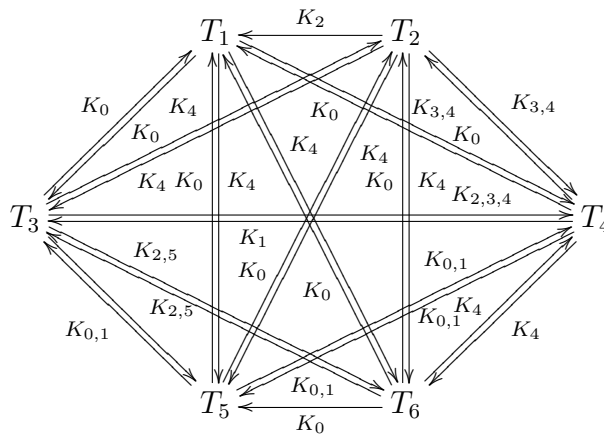
Příklad 1.1 Vyhodnocení týmů pochodu

Dálkového pochodu se účastní 47 chodičů rozdělených do 6 týmů T_1 – T_6 . Každý účastník je členem právě jednoho týmu, tedy množina všech účastníků pochodu

je $A = \bigcup_{i=1}^6 T_i$. Jejich cílem je, aby členové z každého týmu došli daleko a ve velkém počtu. Chceme situaci vyhodnotit – provést skupinové hodnocení vzhledem k ohodnocení $h : A \rightarrow \langle 0, 100 \rangle$, kde $h(a)$ je délka úseku zvládnutá účastníkem a . Předpokládejme následující počty účastníků na trase v jednotlivých týmech – měřeno na startu (K_0), 3 kontrolních stanovištích (K_1 - K_3) a v cíli (K_4)

tým	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
T_1	10	5	5	3	0
T_2	10	5	4	3	0
T_3	8	8	4	3	1
T_4	8	7	5	4	2
T_5	6	6	5	3	3
T_6	5	5	5	3	3

Příslušná relace bude následující (znázorněna grafem):



Výškovnice je určena relací R^* vzniklou odstraněním protisměrných šipek:

$$T_1 \longleftarrow T_2$$

T_3

T_4

$$T_5 \longleftarrow T_6$$

Do výsledné množiny patří prvky, ze kterých nevychází šipka. Významné týmy tedy jsou:

$$T_1, T_3, T_4, T_5.$$